Resistência dos Materiais I

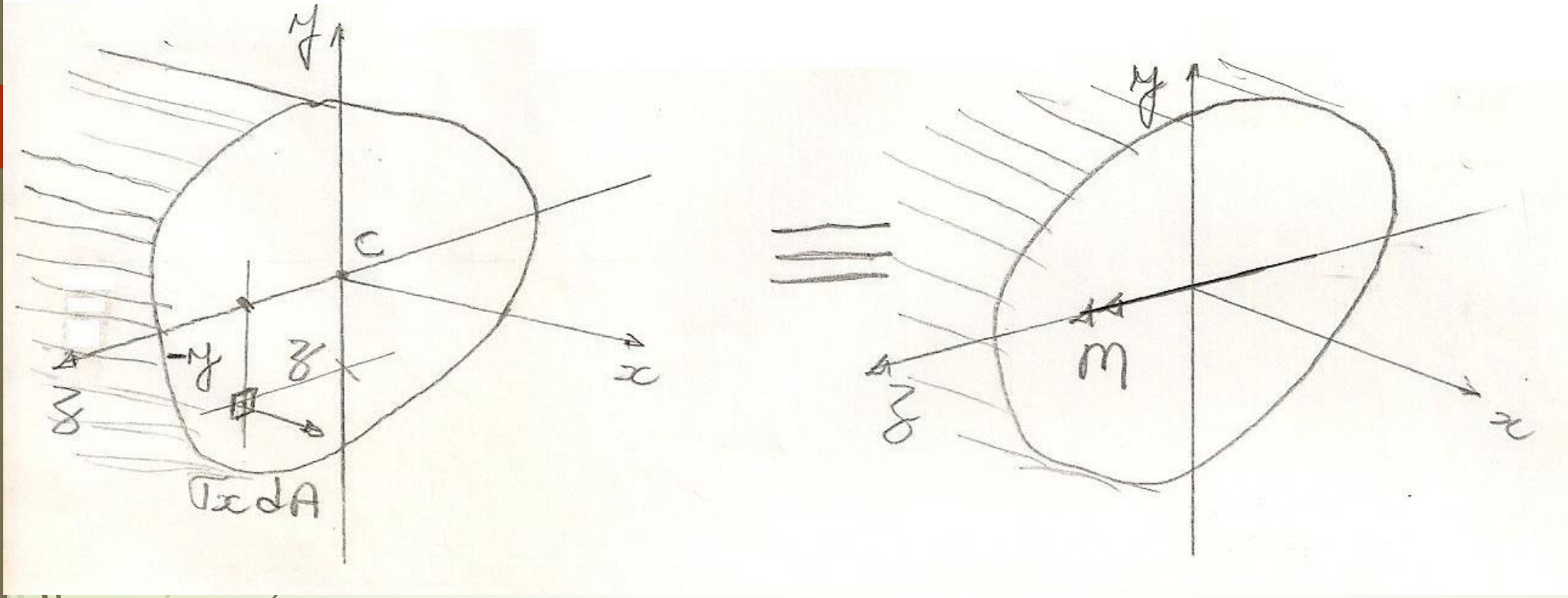
Flexão Pura Oblíqua

Prof. D.Sc. Cláudio Cruz Nunes
DENC-FAET-UFMT

Flexão fora de um plano que contenha um eixo centroidal principal (central) de inércia.

Quando o momento aplicado não é normal a um eixo central de inércia a linha neutra não coincide com a direção do momento.

Para determinar a direção da linha neutra, considere a seção de forma qualquer, sujeita a um momento M na direção z.



Como as resultantes das tensões equivalem ao esforços tem-se:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \sigma_x \, dA = 0$$

$$\sum M_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \int z \, \sigma_x \, dA = 0$$

$$\sum M_z = M \quad \Rightarrow \quad \int -y \, \sigma_x \, dA = M$$

Da equação $\int \sigma_x \, dA = 0$

Concluiu-se, no assunto de flexão pura, que a linha neutra passa pelo centroide da seção transversal, logo deve estar num eixo em ralação ao qual o momento estático é igual a zero. Então, esse eixo deve ser centroidal.

Pela equação $\int - y \sigma_x \, dA = M$ Chegou-se a conclusão que

$$\sigma_x = -\frac{M\,y}{I}$$

Até então, para satisfazer a equação $\int z \sigma_x \, dA = 0$

considerou-se que a seção era simétrica em relação a y. Como a seção em questão tem forma qualquer, deve-se analisar novamente esta equação.

Até o limite de proporcionalidade tem-se que:

$$\sigma_x = -\frac{\sigma_m y}{c}$$

Substituindo na equação $\int z\,\sigma_x\,dA = 0$ tem-se:

$$-\frac{\sigma_m}{c}\int yz\,dA = 0$$

Como resolver esta equação?

Qual o significado da integral?

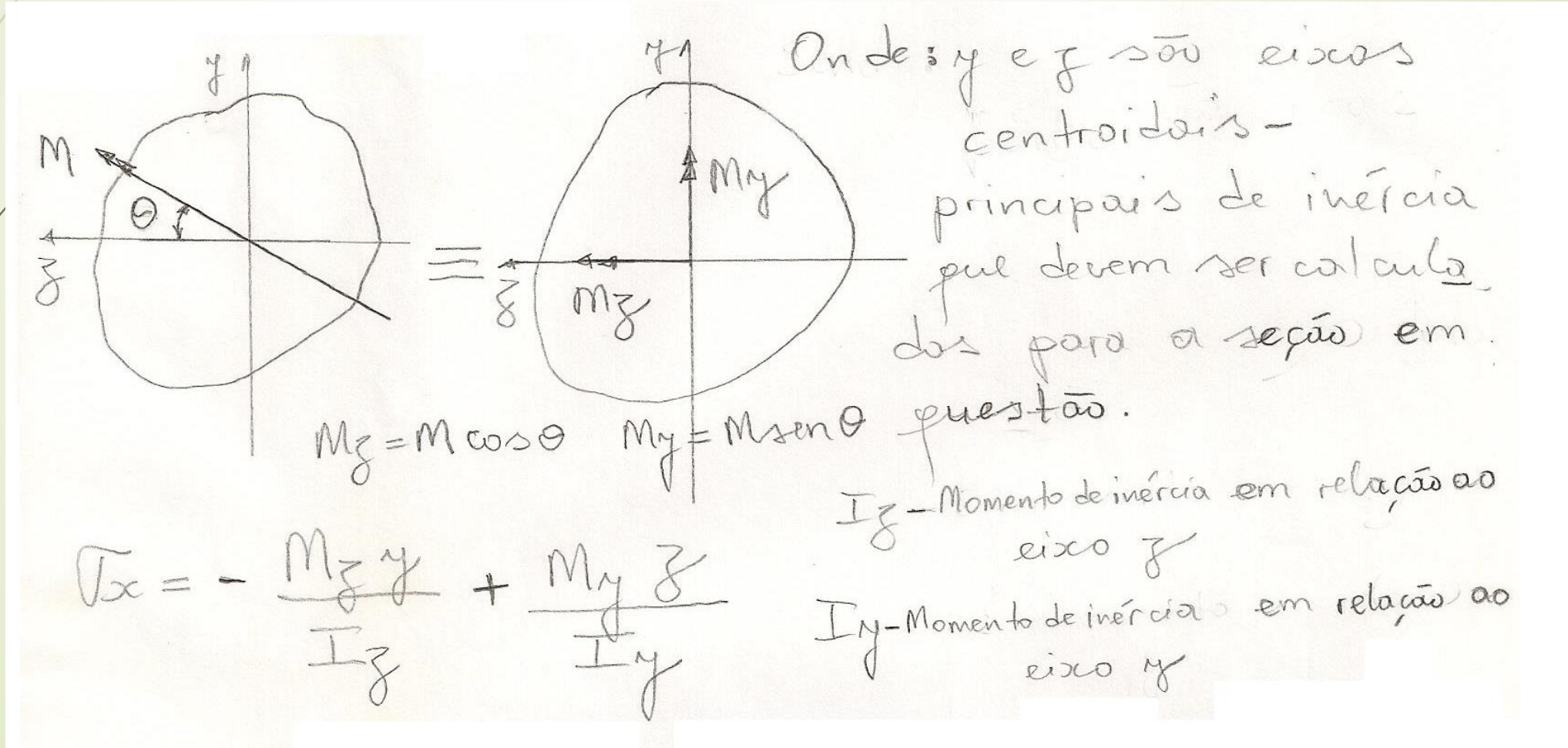
$$-\frac{\sigma_m}{c}\int yzdA = 0$$

Esta equação só é satisfeita se a integral $\int yzdA$ for igual a zero.

Porém, esta integral é o produto de inércia da seção e só é igual a zero se os eixos y e z forem os eixos centroidais principais (centrais) de inércia da seção transversal.

"Deste modo, a linha neutra da seção vai coincidir com o eixo do conjugado M se, e somente se, o vetor M for dirigido segundo um dos eixos centrais de inércia da seção."

Com tudo isso, para uma seção onde o momento está aplicado de forma oblíqua, pode-se decompor o momento em dois momentos, cada um na direção de um dos eixos principais de inércia o obter a tensão normal por superposição dos efeitos.


M
θ
My
Mz
Onde: y e z são eixos centroidais - principais de inércia que devem ser calculados para a seção em questão.
Mz = M cos θ
My = M sen θ
Iz - Momento de inércia em relação ao eixo z
Iy - Momento de inércia em relação ao eixo y

$$\sigma_x = -\frac{M_z\, y}{I_z} + \frac{M_y\, z}{I_y}$$

Como obter a posição e inclinação da linha neutra?

A linha neutra pode ser obtida fazendo-se: $\sigma_x = 0$

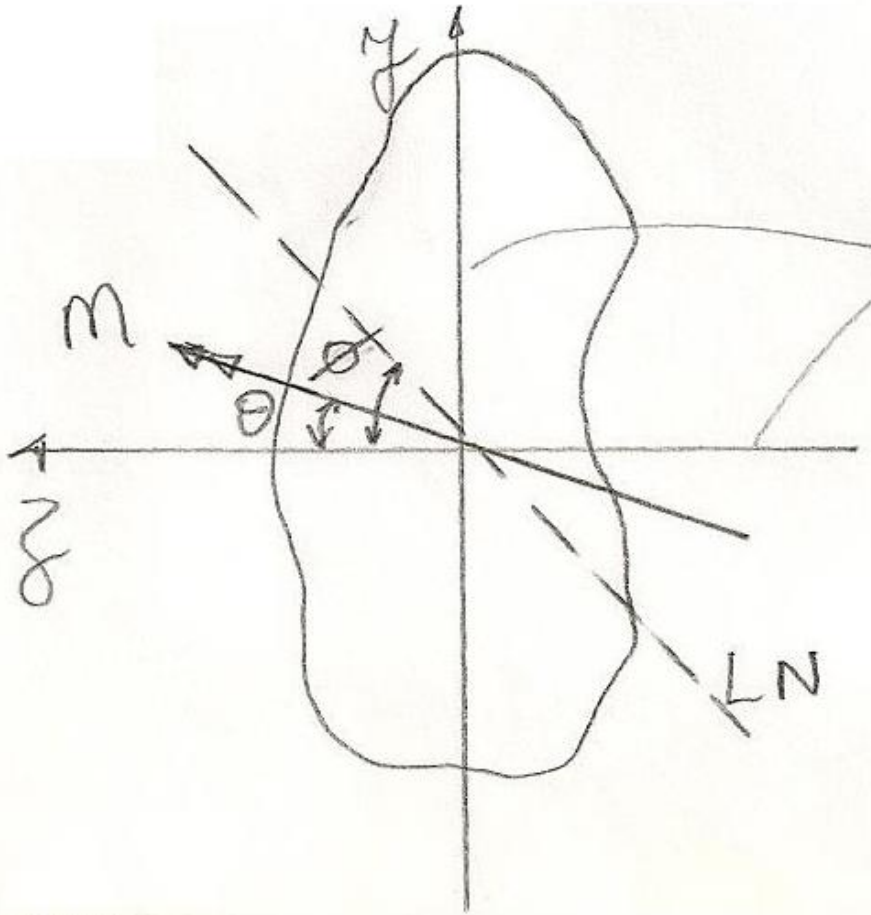
$$-\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = 0$$

Substituindo Mz = M Cosθ e My = M Senθ, obtém-se

$$y = \left(\frac{I_z}{I_y} tg\theta\right) z \qquad \text{com} \qquad tg\emptyset = \frac{I_z}{I_y} tg\theta$$

Nota-se que a direção da linha neutra numa seção qualquer sujeita a um momento oblíquo não coincide com a direção do momento. E pela relação $\frac{I_z}{I_y}$ nota-se que a linha neutra está entre o eixo do momento e o eixo de menor momento de inércia.

$$y = \left(\frac{I_z}{I_y} tg\theta\right) z \qquad \text{com} \qquad tg\emptyset = \frac{I_z}{I_y} tg\theta$$



eixos centroidais - principais de inércia.